Πανεπιστημιο Ιωαννινων, Τμημα Μαθηματικων,
Αριθμητικη Επιλυση Συνηθων Διαφορικων Εξισωσεων,
διδασκων: Μ. Ξενος 09/09/2016

Θέματα

1. (α) Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y' = 2t, \quad t \in [0,\, 1], \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Για ομοιόμορφη διαμέριση, να δείξετε ότι η ακρίβεια της μεθόδου του Euler γι΄ αυτό το πρόβλημα αρχικών τιμών είναι ακριβώς ένα. Να εκτιμήσετε για το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών τη συνέπεια της μεθόδου του Euler για την ίδια ομοιόμορφη διαμέριση.
(β) Θεωρήστε το εξής πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), \quad t \geq 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

Να δείξετε ότι η μέθοδος του μέσου είναι B-ευσταθής μέθοδος.

2. (α) Να δείξετε ότι μια μέθοδος Runge-Kutta έχει τάξη ακρίβειας $p \geq 1$ αν και μόνο αν $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$. Πώς καλείται η μέθοδος Runge-Kutta αν ισχύει ότι $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$;
(β) Θεωρήστε το γνωστό πρόβλημα αρχικών τιμών. Υποθέστε ότι η f είναι αρκετά ομαλή στο $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}$ και ότι η ίδια και κατάλληλες μερικές παράγωγοί της είναι φραγμένες. Προσδιορίστε όλες τις μεθόδους των Runge-Kutta της μορφής:
$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & \tau_2 \\ \hline b_1 & b_2 & \end{array}$$
οι οποίες έχουν τάξη ακρίβειας $p = 2$.

3. (α) Έστω η πολυβηματική μέθοδος:

$$\begin{cases} y^0, y^1, ..., y^{k-1}, \\ \alpha_k y^{n+k} + ... + \alpha_0 y^n = h(\beta_k f^{n+k} + ... + \beta_0 f^n), \quad n = 0, ..., N-k. \end{cases} \tag{3}$$

(i) Πότε η πολυβηματική μέθοδος πληροί τη συνθήκη των ριζών; (ii) Πότε η πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής;
(β) Είναι η τριβηματική μέθοδος που περιγράφεται από τις σταθερές:

$$\alpha_3 = 1, \alpha_2 = -\frac{11}{6}, \alpha_1 = 1, \alpha_0 = -\frac{1}{6}, \beta_3 = \frac{1}{12}, \beta_2 = \frac{1}{6}, \beta_1 = -\frac{1}{2}, \beta_0 = \frac{7}{12} \tag{4}$$

ευσταθής και γιατί;

4. (α) Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [\alpha,\, \beta], \\ y(\alpha) = y_0. \end{cases} \tag{5}$$

Η f ικανοποιεί την ολική συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t. Να δείξετε ότι για την μέθοδο του Euler και για ομοιόμορφο διαμερισμό, $t^n = \alpha + nh$, $0 \leq n \leq N$, $Nh = \beta - \alpha$, ισχύει η εκτίμηση:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq e^{L(\beta - \alpha)} \, |y_0 - z_0| \tag{6}$$

Ποιά συμπεράσματα δίνει η σχέση (6) για την ευστάθεια του προβλήματος αρχικών τιμών;
(β) (i) Να περιγράψετε τη συνάρτηση ευστάθειας για μια άμεση μέθοδο Runge-Kutta που έχει τάξη ακρίβειας p και αποτελείται από q στάδια (με $p < q$). (ii) Να βρεθεί η περιοχή απόλυτης ευστάθειας των Runge-Kutta μεθόδων με τάξη ακρίβειας 1, 2 και 3 των οποίων το πλήθος των συναρτησιακών υπολογισμών συμπίπτει με την τάξη της μεθόδου.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Τα θέματα είναι ισοδύναμα. **Καλη Επιτυχια!**